Inversión de Transformadas de Laplace:

- Método de la Expansión en Fracciones Parciales

Sea una función cualquiera en el dominio de la frecuencia $\bar{x}$. Ésta función puede presentarse como el cociente de dos polinomios:

$$\bar{x} = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

En el caso del polinomio del denominador $P(s)$, se tienen n- raíces:

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n = r_1(s) \cdot r_2(s) \cdot r_3(s) \ldots r_n(s)$$

Entonces la función $\bar{x}$ puede ser expandida en una serie de fracciones:

$$\bar{x} = \frac{Q}{P} = \frac{C_1}{r_1(s)} + \frac{C_2}{r_2(s)} + \ldots + \frac{C_n}{r_n(s)}$$

La forma en como se realice esta expansión depende del tipo de polinomio que sea $P(s)$. Se tienen los siguientes casos:

1. El polinomio $P(s)$ tiene n-raíces distintas, reales o complejas.
2. El polinomio $P(s)$ tiene raíces repetidas.

A continuación revisaremos los casos y sus variantes.

- Raíces Reales Distintas.

En forma general se tiene:

$$\bar{x} = \frac{Q(s)}{(s+P_1)(s+P_2)\ldots(s+P_n)} = \frac{C_1}{s+P_1} + \frac{C_2}{s+P_2} + \ldots + \frac{C_n}{s+P_n}$$

Tomando la anti transformada:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{s+P}\right] = Ce^{-Pt}$$

Se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{x}] = x' = C_1 e^{-P_1 t} + C_2 e^{-P_2 t} + \ldots + C_n e^{-P_n t}$$

Pero, aún falta determinar el valor de los coeficientes C_1, C_2, …, C_n.

Para esto se realiza lo siguiente:
Para determinar C_1, se multiplica la expresión $\bar{x}$ por el denominador del coeficiente C_1.

$$\bar{x} \cdot (s+P_1) = \frac{Q}{P}(s+P_1) = C_1 + \frac{C_2 \cdot (s+P_1)}{(s+P_2)} + \frac{C_3 \cdot (s+P_1)}{(s+P_3)} + \ldots + \frac{C_n \cdot (s+P_1)}{(s+P_n)}$$

Y se substituye en "s" la raíz correspondiente: $s = -P_1$. Con esto se puede despejar C_1.
Lo anterior se repite para todos los coeficientes.

- Raíces Complejas Distintas:

Tomemos un ejemplo de estudio, sea:

$$\overline{x} = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{s+1}{\left[s-(1+2i)\right]\cdot\left[s-(1-2i)\right]}$$

Raíces complejas Conjugadas

Donde $i = \sqrt{-1}$

La expansión en fracciones parciales es:

$$\overline{x} = \frac{s+1}{\left[s-(1+2i)\right]\cdot\left[s-(1-2i)\right]} = \frac{C_1}{s-(1+2i)} + \frac{C_2}{s-(1-2i)}$$

Cálculo de coeficientes:

$$x\left[s-(1+2i)\right] = \frac{(s+1)\left[s-(1+2i)\right]}{\left[s-(1+2i)\right]\cdot\left[s-(1-2i)\right]} = C_1 + \frac{C_2\left[s-(1+2i)\right]}{\left[s-(1-2i)\right]}$$

Substituyendo la raíz correspondiente $s = 1 + 2i$, entonces:

$$= \frac{1+2i+1}{1+2i-1+2i} = C_1 + \frac{C_2\left[1+2i - 1 - 2i\right]}{\left[1+2i-1+2i\right]} = \frac{2+2i}{4i} = C_1$$

Finalmente:

Recuerda:
$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$$C_1 = \frac{1+i}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i+i^2}{2i^2}$$

$$\boxed{C_1 = \frac{i-1}{2(-1)} = \frac{1-i}{2}}$$

Observa que los valores de las constantes con conjugados

De igual manera se encuentra:

$$\boxed{C_2 = \frac{1+i}{2}}$$

Ahora, si se toma la anti transformada, se tiene:

$$\overline{\mathcal{L}}\left[\overline{x}\right] = x' = \overline{\mathcal{L}}\left[\frac{\frac{1-i}{2}}{s-(1+2i)}\right] + \overline{\mathcal{L}}\left[\frac{\frac{1+i}{2}}{s-(1-2i)}\right]$$

Aplicando también que: $\overline{\mathcal{L}}\left(\frac{C}{s+P}\right) = Ce^{-Pt}$, se tiene:

$$x' = \frac{1-i}{2}e^{(1+2i)t} + \frac{1+i}{2}e^{(1-2i)t}$$

Agrupando términos:

$$x' = \frac{e^t}{2}\left[(1-i)e^{2it} + (1+i)e^{-2it}\right]$$

Para resolver el problema que implica la presencia de los números complejos, se toma la identidad de Euler:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\cdot \mathrm{sen}\alpha$$

Entonces:

Recuerda:
$\cos(u) = \cos(-u)$
$\mathrm{sen}(-u) = -\mathrm{sen}(u)$

$$e^{2it} = \cos(2t) + i \cdot sen(2t)$$
$$e^{-2it} = \cos(-2t) + i \cdot sen(-2t) = \cos(2t) - i \cdot sen(2t)$$

Substituyendo:

$$x' = \frac{e^{t}}{2}\left[\left(\cos(2t) + i \cdot sen(2t)\right)(1-t) + \left(\cos(2t) - i \cdot sen(2t)\right)(1-t)\right]$$
$$x' = e^{t}\left(\cos(2t) + (2t)\right)$$

Aplicando identidades:

$$x' = e^{t}\sqrt{2}\cdot sen(2t + \varphi)$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45°$$

<u>Recuerda:</u>

$$a_1\cos(b) + a_2 sen(b) = a_3 sen(b + \varphi)$$
$$a_3 = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}\ ; \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

- Raíces Repetidas:

Tomando como ejemplo:

$$\bar{x} = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)}$$

En éste caso el polinomio $P(s)$ tiene las siguientes raíces:

$$P_1 = P_2 = P_3 = -1 \text{ y } P_4 = -2$$

La expansión en fracciones parciales para éste ejemplo es la siguiente:

$$x = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{C_1}{(s+1)^1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_3}{(s+1)^3} + \frac{C_4}{(s+2)}$$

Observa que en el caso de raíces repetidas cambia la potencia de cada una de manera creciente.

Para calcular la anti transformada se utiliza la identidad siguiente:

$$\overline{\mathcal{L}}\left[\frac{C}{(s+a)^n}\right] = \frac{Ct^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$$

Con lo cual se obtiene:

$$\overline{\mathcal{L}}[\bar{x}] = x' = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{C_3}{2}t^2 e^{-t} + C_4 e^{-2t}$$

Ahora el problema que resta es determinar el valor de las constantes:

1. Para el caso de C_4, se aplica el procedimiento de raíces no repetidas, multiplicando la igualdad por $\left(s+2\right)$ y substituyendo la raíz $s=-2$ y despejando C_4. Con esto se obtiene $C_4=-1$.
2. Para C_3 se realiza el mismo procedimiento de C_4 tomando en cuenta que es la raíz repetida con un polinomio de mayor exponente. Con esto se encuentra que $C_3=1$.
3. Para el caso de C_2 y C_1; el procedimiento convencional no es útil, puesto que las ecuaciones que resultan se indeterminan. Para resolver éste asunto se toma la primera, la segunda, y así sucesivamente, derivadas con el propósito de encontrar ecuaciones independientes. Esto es:
    - Multiplicando por $\left(s+1\right)^3$ para encontrar una ecuación más simple:

    $$\bar{x}\left(s+1\right)^3=\frac{1}{\left(s+2\right)}=C_1\left(s+1\right)^2+C_2\left(s+1\right)+C_3+\frac{C_4\left(s+1\right)^3}{\left(s+2\right)}$$

    - Derivando con respecto de s:

    $$\frac{\delta\left(\bar{x}\left(s+1\right)^3\right)}{\delta s}=\frac{-1}{\left(s+2\right)^2}=2C_1\left(s+1\right)+C_2+C_4\frac{\left(s+1\right)^2\left(2s+5\right)}{\left(s+2\right)^2}$$

    - Esta ecuación ya permite establecer el valor de C_2, substituyendo el valor de la raíz $s=-1$, se encuentra que $C_2=-1$
    - Ahora para obtener el valor de la constante C_1 se procede a derivar nuevamente:

    $$\frac{\delta^2\left(\bar{x}\left(s+1\right)^3\right)}{\delta s^2}=\frac{2}{\left(s+2\right)^3}=2C_1+2C_4\left(s+1\right)\frac{s^2+5s+7}{\left(s+2\right)^3}$$

    - Finalmente aplicando la raíz $s=-1$ y resolviendo: $C_1=1$

Con lo cual se tiene:

$$\boxed{x'=e^{-t}\left(1-t+\frac{1}{2}t^2\right)-e^{-2t}}$$